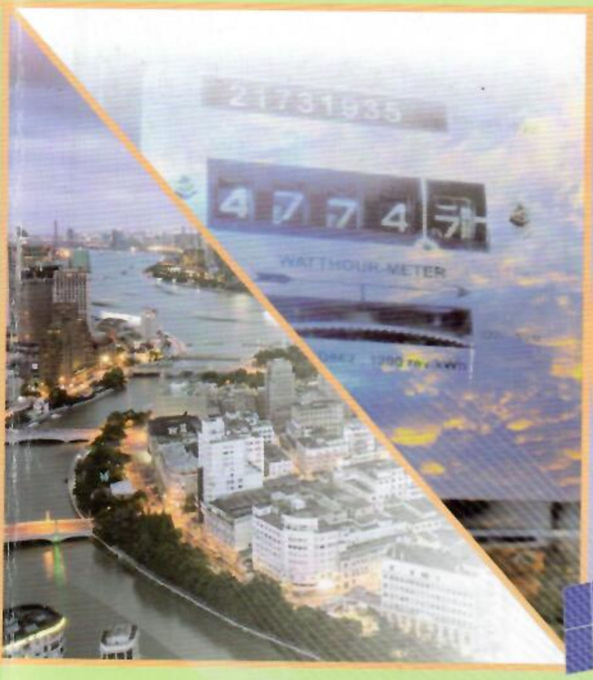
"十四五"职业教育国家规划教材
（中等职业学校公共基础课程教材）

数学

SHUXUE

基础模块

上册



张景斌　主编

语文出版社

第五单元

三角函数

回顾与思考

在现实世界中有许多周期运动与周期现象，它们的运动和变化周而复始．例如，骑车上学时车轮上某一定点绕车轮轴的运动，每天 24 小时的昼夜变化，大海中的潮起潮落等，这些周期运动与周期现象都可以用三角函数来刻画．

三角函数既是进一步学习数学的基础，又是解决生产实际和科学技术中某些问题的工具．

本单元，我们在初中学习的锐角三角函数的基础上，对角的概念进行扩展，继续讨论任意角的三角函数，学习一些三角关系式，研究三角函数的图像和性质．这些知识将为同学们今后学习专业知识，掌握职业技能打下基础．

5.1 角的概念的推广

引例

生活中的很多物体都给我们以角的印象，如三角板的三个角，钟表的时针与分针所构成的角等. 但是，我们注意到，钟表的时针与分针一直在不停地旋转着，它们所转过的角已远远超过360°，那么这样的角该怎样描述呢？

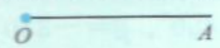
我们知道，在平面内，角可以看作是一条射线绕着它的端点旋转而成的图形. 旋转起始时的射线叫做**角的始边**，终止时的射线叫做**角的终边**，射线的端点叫做**角的顶点**.

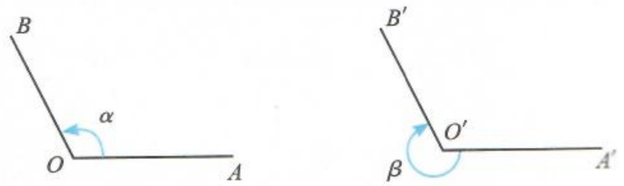
图 5 - 1 (1) 中，OA 是角 α 的始边，OB 是角 α 的终边，O 是角 α 的顶点.

图 5 - 1 (2) 中，$O'A'$ 是角 β 的始边，$O'B'$ 是角 β 的终边，O' 是角 β 的顶点.

工具箱

直线上的一点和它一旁的部分所组成的图形称为射线或半直线，如射线 OA.





(1) (2)

图 5 - 1

角除了用字母 A，B，C 等表示外，还可以用字母 α，β，γ 等表示. 特别是当角作为变量时，常用字母 x 表示.

在初中，我们学习过 0° 到 360° 的角. 如果 $\alpha=90°$，那么 α 叫做直角；如果 $0°<\alpha<90°$，那么 α 叫做锐角；如果 $90°<\alpha<180°$，那么 α 叫做钝角；如果 $\alpha=180°$，那么 α 叫做平角；如果 $\alpha=360°$，那么 α 叫做周角.

在实际问题中，我们经常会遇到大于 $360°$ 的角和按不同方向旋转所成的角．例如，机械专业的学生拧紧一个螺帽，要把它按一个方向旋转，可能需要 1 周，2 周，……，这样转过的角往往超过 $360°$．而当放松螺帽时，又要按与拧紧时相反的方向旋转，可能需要 1 周，2 周，……，因此，角的范围不只限于 $0°$ 到 $360°$．

既然角是由一条射线绕着它的端点旋转而成，旋转时就有两个相反的方向，即逆时针方向和顺时针方向．为了区别因旋转方向不同而形成的角，我们规定：按逆时针方向旋转所得到的角为**正角**，如图 5-1 (1) 中，α 为正角；而按顺时针方向旋转所得到的角为**负角**，如图 5-1 (2) 中，β 为负角．我们还规定：当一条射线没有做任何旋转时，也把它看成一个角，叫做**零角**．这样，零角的始边和终边重合．如果角 α 是零角，那么 $\alpha=0°$．

如图 5-2 所示，射线 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转 $45°$ 到 OB 的位置，所形成的角可记作 $\angle AOB=45°$；射线 OA 绕端点 O 按顺时针方向旋转 $30°$ 到 OC 的位置，所形成的角可记作 $\angle AOC=-30°$．

画图时，我们常用带箭头的弧来表示旋转生成的角，如图 5-3 中，$\alpha=450°$，$\beta=-330°$．

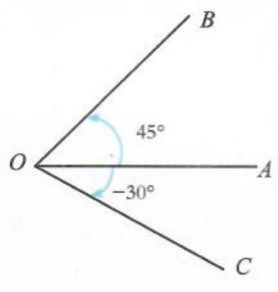


图 5-2

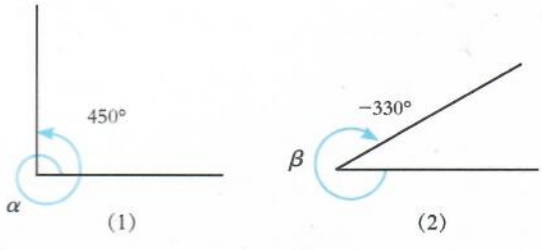


图 5-3

至此，我们就把角的概念推广到任意大小的正角、负角和零角的范围．

为了便于讨论问题，我们总是把任意大小的角放到平面直角坐标系内

加以讨论，具体做法是：①使角的顶点和坐标原点重合；②使角的始边和 x 轴的非负半轴重合．这时，角的终边落在第几象限，就说这个角是第几象限的角（或称这个角属于第几象限）；如果这个角的终边落在坐标轴上，那么这个角就不属于任何一个象限．

试一试 请在平面直角坐标系中作出 $60°$，$150°$，$270°$，$-210°$，$-300°$的角，并分别说出它们各是第几象限角．

如果把 $\alpha=30°$按上述方法放到直角坐标系中（图 5－4），α 的始边为 Ox，终边为 OP，那么 α 是第一象限的角．

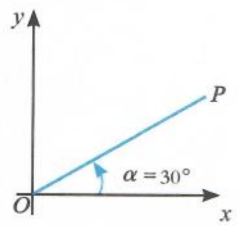


图 5－4

议一议 以 Ox 为始边，把 $30°$角的终边分别按照逆时针方向和顺时针方向旋转 2 周后，所得角的大小分别是多少度？与 $\alpha=30°$有相同的始边和终边的角可以怎样表示呢？

这些角可以分别表示为

$30°+360°$，　$30°-360°$，

$30°+2\times360°$，　$30°-2\times360°$，

$30°+3\times360°$，　$30°-3\times360°$，

…

所有这些角可以表示为 $30°+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0$）．如果把 α 本身也算在内，那么这些角可以表示为 $30°+k\cdot360°$（$k\in\mathbf{Z}$）．

这些顶点为坐标原点，始边为 x 轴正半轴，且有相同终边的角，叫做**终边相同的角**．由上述问题的讨论可以知道，与角 α 终边相同的角有无数多个．

一般地，所有和角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可以表示成

$\alpha+k\cdot 360°\ (k\in\mathbf{Z})$.

结合集合的知识，对于每一个任意大小的角 α，就确定了一个与 α 终边相同的角的集合，这个集合可以表示为

$$S=\{x\mid x=\alpha+k\cdot 360°,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

反之，如果 $x=\alpha+k\cdot 360°\ (k\in\mathbf{Z})$，那么 x 与角 α 就是终边相同的角，因此，它们或同属于某一个象限，或终边同在某一条坐标轴的半轴上.

例如，$750°=30°+2\times 360°$，则 $750°$ 角与 $30°$ 角同属于第一象限；$-450°=270°-2\times 360°$，则 $-450°$ 角与 $270°$ 角同在 y 轴的负半轴上.

例1 在 $0°\sim 360°$ 范围内*，找出与下列各角终边相同的角，并判定各角所在的象限：

(1) $1\ 000°$；　(2) $-120°$；　(3) $410°30'$.

解： (1) $\because 1\ 000°=280°+2\times 360°$，

$\therefore 1\ 000°$ 角和 $280°$ 角的终边相同.

又 $280°$ 角属于第四象限，

$\therefore 1\ 000°$ 角也是第四象限角.

(2) $\because -120°=240°-360°$，

$\therefore -120°$ 角和 $240°$ 角的终边相同.

又 $240°$ 角属于第三象限，

$\therefore -120°$ 角也是第三象限角.

(3) $\because 410°30'=50°30'+360°$，

$\therefore 410°30'$ 角和 $50°30'$ 角的终边相同.

又 $50°30'$ 角属于第一象限，

$\therefore 410°30'$ 角也是第一象限角.

想一想　锐角是第几象限角？第一象限的角都是锐角吗？

* 本书中，角 α 在 $0°\sim 360°$ 范围内，是指 $0°\leqslant\alpha<360°$.

例2 写出与下列各角终边相同的角的集合 S：

(1) 45°；　　(2) -75°；　　(3) $-335^\circ37'$.

解： (1) $S=\{x \mid x=45^\circ+k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $S=\{x \mid x=-75^\circ+k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$；

(3) $S=\{x \mid x=-335^\circ37'+k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

例3 写出终边在 y 轴上的角的集合.

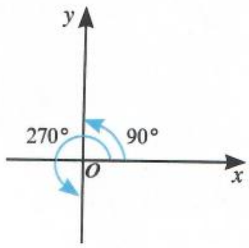


图 5－5

解： 在 $0^\circ\sim360^\circ$ 范围内终边在 y 轴上的角，一个是 90° 角，另一个是 270° 角（图 5－5）.

因此，终边在 y 轴上的所有的角是 $90^\circ+k\cdot360^\circ$ 和 $270^\circ+k\cdot360^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$. 注意到

$$90^\circ+k\cdot360^\circ=90^\circ+2k\cdot180^\circ, \qquad ①$$

$$\begin{aligned}270^\circ+k\cdot360^\circ&=90^\circ+180^\circ+2k\cdot180^\circ\\&=90^\circ+(2k+1)\cdot180^\circ. \qquad ②\end{aligned}$$

①式的右边是 180° 的偶数倍加 90°，②式的右边是 180° 的奇数倍加 90°，两式合并起来就是 180° 的任意整数倍加 90°，即 $90^\circ+n\cdot180^\circ$ $(n\in\mathbf{Z})$，所以，终边在 y 轴上的角的集合可以写成

$$S=\{\beta \mid \beta=90^\circ+n\cdot180^\circ,\ n\in\mathbf{Z}\}.$$

想一想　终边在 x 轴上的角的集合怎样表示？

练习

1. 在直角坐标系中，以原点为顶点，x 轴的正半轴为始边，画出下列各角，并分别指出它们是第几象限角：

   (1) 390°；　　(2) -60°；　　(3) -585°.

2. 在 $0^\circ\sim360^\circ$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并分别指出它们是第几象限角：

   (1) 480°；　　(2) -760°；　　(3) $932^\circ30'$.

3. 写出与下列各角终边相同的角的集合：

   (1) 72°；　　(2) -40°；　　(3) $202^\circ39'$.